

Propriétés (p.100)

(P₁): 0_V est unique

Supposons l'existence de 0_V et 0'_V avec
 $u + 0_V = u$ ₍₁₎ et $u + 0'_V = u$ ₍₂₎ $\forall u \in V$. Alors:

$$0'_V = \underset{\substack{\uparrow \\ (1)}}{0'_V} + 0_V = 0_V + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{axiome 1)}}}{0'_V} = \underset{\substack{\uparrow \\ (2)}}{0_V}$$

(P₂): l'opposé de v est unique

Soit $v \in V$. Supposons l'existence de $-v$ et $-v' \in V$
avec $v + (-v) = v + (-v') = 0_V$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } -v' &= 0_V + (-v') = v + (-v) + (-v') \\ &\xrightarrow{\text{axiome 3)}} = v + (-v') + (-v) = 0_V + (-v) = -v \\ &\xrightarrow{\text{axiome 1)}} \end{aligned}$$

(P₃): 0 · u = 0_V

dans $\mathbb{R}$!

$$u + 0 \cdot u = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{axiome 8)}}}{1 \cdot u} + 0 \cdot u = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{axiome 6)}}}{(1+0)u} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{axiome 8)}}}{1 \cdot u} = u$$

donc $0 \cdot u = 0_V$ par la propriété (P₁)

(P₄): (-1) · u = -u

Calculons $u + (-1) \cdot u$:

dans $\mathbb{R}$!

$$\begin{aligned} u + (-1) \cdot u &\stackrel{(8)}{=} 1 \cdot u + (-1) \cdot u \stackrel{(6)}{=} (1 + (-1))u \stackrel{\downarrow}{=} 0 \cdot u \\ &\stackrel{(P_3)}{=} 0_V \end{aligned}$$

Donc $(-1) \cdot u$ est égal à l'opposé de u , car celui-ci est unique.

$$(P_5) \quad \underline{\lambda \cdot 0_V = 0_V}$$

$$\text{Par } (P_3), \text{ on a } \lambda \cdot 0_V = \lambda (0 \cdot 0_V) \stackrel{?) }{=} (\lambda \cdot 0) \cdot 0_V$$

$$= 0 \cdot 0_V = 0_V$$

↑
dans $\mathbb{R}$!